académie Strasbourg
Ministère de l'Éducation nationale
Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche

Égalité d'aires

Énoncé

On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 8$ et $AD = 10$. Pour tout point M du segment $[AB]$, on considère le point J du segment $[AD]$ et le point I tels que $AMIJ$ soit un carré.
On appelle H le point d'intersection des droites (IJ) et (BC) et K le point d'intersection des droites (MI) et (CD).
Le but de l'exercice est de chercher les positions du point M pour lesquelles la somme des aires des quadrilatères $AMIJ$ et $CKIH$soit égale à la moitié de l'aire du rectangle $ABCD$.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, faire une figure.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure.

2. Faire afficher les distances AM, IH et IK ainsi que les aires des quadrilatères $AMIJ$ et $CKIH$.
   Faire varier le point M sur le segment $[AB]$ et faire une conjecture sur les positions du point M qui semblent convenir au problème.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure et de la conjecture.

3. On note x la longueur du segment $[AM]$.
   (a) Exprimer en fonction de x l'aire du carré $AMIJ$.
   (b) Quelle est la nature du quadrilatère $CKIH$. Exprimer son aire en fonction de x.
   (c) Traduire le problème par une équation d'inconnue x.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure.

   (d) Montrer que cette équation s'écrit $(x - 4)(x - 5) = 0$ et vérifier la conjecture faite au 2.

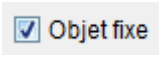
Production demandée

– Construction d'une figure dynamique permettant de réaliser une conjecture sur la position du point M.
– Mise en équation du problème.
– Résolution de l'équation de l'équation en 3 (d)

D'après une épreuve pratique de l'académie de Versailles.

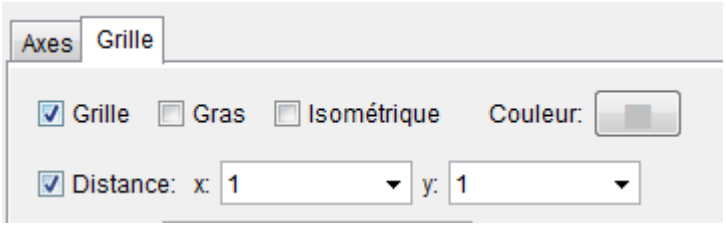
Epreuve pratique de maths en 3ème. Sujet 003 Strasbourg 2009. Solution avec Geogebra

Question 1

Le rectangle ABCD a des dimensions fixes entières, le plus simple est d'utiliser l'outil polygone et de travailler sur la grille. Une fois le rectangle tracé aux bonnes dimensions, on fixe les points A, B, C et D 

dans les propriétés de chaque point pour être sûr de conserver le rectangle.

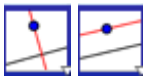
Remarques :



- Il est souhaitable de régler systématiquement la grille en entrant dans Geogebra. Clic droit sur la feuille pour accéder au menu contextuel. Dans le cas présent on affiche la grille et on cache les axes inutiles.
- Pour utiliser un outil, il est toujours utile de lire son mode d'emploi simplifié en haut à droite des icônes d'outils.
- Si les dimensions du rectangle étaient plus exotiques (ex : 5,55 ou $\sqrt{2}$ ou autre) la réalisation à la main sur la grille serait difficile ou impossible ; dans ce cas, il faudrait utiliser l'outil « cercle centre et rayon » ou l'outil « segment point longueur » pour avoir la bonne longueur.

On place un point M libre sur le segment [AB], l'erreur de débutant est de placer M n'importe où puis de l'amener sur [AB]. Quand le point est placé directement sur le segment, il ne peut plus le quitter.

Le point J est obtenu par intersection du cercle de centre A passant par M et du segment [AD]. On trace d'abord le cercle puis on marque J .

On mène ensuite des perpendiculaires ou des parallèles  aux bons endroits pour placer I puis H et K par intersections .

Question 2

Pour afficher les longueurs AM, IH et IK, on peut tracer les segments correspondants puis dans les propriétés de l'objet utiliser

. Pour afficher les aires des quadrilatères, on peut commencer par les tracer puis utiliser

.

Pour trouver la conjecture, il faut dire quand la somme des 2 aires est 40, ici les valeurs sont simples et on peut le faire de tête, il aurait été plus efficace de faire afficher cette somme avec l'outil texte

avec le texte suivant par exemple (attention aux guillemets) : "La somme des 2 aires est : " + X

Où X est une variable calculée auparavant contenant cette somme et que l'on génère sur la ligne de saisie du bas de l'écran par X=poly2+poly3 où poly2 et poly3 sont les valeurs des aires de chacun des polygones.

En bougeant le point M sur [AB] et en regardant simultanément l'affichage, on arrive à la conjecture : « Il semble que l'on trouve 40 quand AM=5 ou AM=4 ».

Question 3

La partie informatique est terminée, ici il faut démontrer et c'est souvent dur pour les élèves.

Erreur entre c) et d), il n'y a pas de figure à montrer mais des calculs et à la rigueur un croquis si l'on a pas gardé la figure de Geogebra.

aire(AMIJ)=x^2

CKIH est un rectangle car il a 3 angles droits.

aire(CKIH)=(8-x)(10-x)

$x^2+(8-x)(10-x)=40$ ou $2x^2-18x+40=0$ ou $x^2-9x+20=0$ soit

(x-5)(x-4)=0 équation produit qui a 2 solutions 5 et 4.

Adaptation au lycée

1er niveau cool : même sujet mais l'une des dimensions du rectangle n'est pas connue.

2ème niveau : même sujet sauf que cette fois les dimensions du rectangle sont 2 inconnues *a* et *b*.
Premier intérêt : il va falloir construire un vrai rectangle dynamique de dimensions libres.
Deuxième intérêt : la conjecture est un peu plus dure à deviner (on peut aider en demandant de tester quelques valeurs entières de *a* et *b*).
Troisième intérêt : on travaille sur une équation du second degré paramétrée symétriquement en *a* et *b* facile à traiter.